東工大　2019　二次試験　数学講評

＜難易度　例年との比較＞

昨年も決してやさしいとは言えないセットでしたが，今年はそれ以上の難しさです．$\boxed{5}$ は東工大の対策をしていれば解ける問題ですが，それでも簡単ではありません．比較的易しい $\boxed{1}$ も結構生徒は苦労したようです．$\boxed{2}$ は初手の置換積分に気づかないとどうしようもなく，気づいたとしても計算量が膨大で，解答用紙を何度か書き直すことになったでしょう．$\boxed{3}$ は，出題者は簡単な問題と思って出題しているのでしょうが，実際はそれほど取れていないようです．$\boxed{4}$ は類題の経験がないと手も足も出ないでしょう．100 点を切る合格者は多数出てくると思います．

＜傾向と対策＞

さすがに，今年は難しすぎました．また，東工大らしくない出題もあり，来年以降は従来の数Ⅲ重視の路線に回帰していくと予想されます．

ただ，一目で「見たことある！」というような出題は減少傾向にありますから，良質な初見の問題をたくさん解いて地力をつける以外にないでしょう．頑張って下さい．

東工大　2019　二次試験　数学解答

1

(1)　$h>0$ とする．座標平面上の点O $(0,\ 0)$，点P $(h,\ s)$，点Q $(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s<t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s，t の値を求めよ．

(2)　四面体ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD，BD，CD の長さを ℓ，m，n とする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

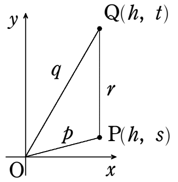
が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体ABCDがどのような四面体のときか答えよ．

(2) の等号成立条件以外は，なんとか行けると思います．というより，他が厳しい問題だらけなので，ここを外すと大変です．

解答

(1)

$$p^2=h^2+s^2,$$
$$q^2=h^2+t^2,$$
$$r^2=(t-s)^2,$$
$$S=\frac{1}{2}(t-s)h$$



より

$$\begin{aligned}
&p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}\,S\\
&=2(h^2+s^2+t^2)-2st-2\sqrt{3}(t-s)h\\
&=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2(s^2+t^2-st)\\
&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+2(s^2+t^2-st)\\
&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{s^2+2st+t^2}{2}\\
&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{(s+t)^2}{2}\geqq 0.\ \text{終}
\end{aligned}$$

この等号は

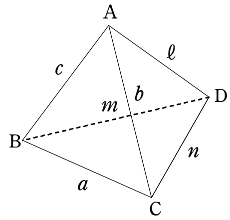
$$\begin{cases} h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=0 \\ s+t=0 \end{cases}$$

すなわち

$$s=-\frac{h}{\sqrt{3}},\ t=\frac{h}{\sqrt{3}}\quad \text{答}$$

のときに成立する．

(2)



(1) より

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{ABC}, \quad \cdots\cdots①$$
$$c^2+m^2+\ell^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{ABD}, \quad \cdots\cdots②$$
$$b^2+\ell^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{ACD}, \quad \cdots\cdots③$$
$$a^2+m^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{BCD}. \quad \cdots\cdots④$$

これらを加えて

$$2(a^2+b^2+c^2+m^2+n^2+\ell^2) \geqq 4\sqrt{3}\,T$$
$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T.\ \text{終} \quad \cdots\cdots⑤$$

⑤の等号が成立するのは，①～④の等号がすべて成立するときである．

(1) の不等式の等号が成立するとき，辺 PQ の中点を M とすると OM⊥PQ，$\mathrm{OM}:\mathrm{MQ}=\sqrt{3}:1$ より △OPQ は正三角形のときであるから，⑤の等号が成立するのは，各三角形がすべて正三角形のとき，すなわち四面体 ABCD が正四面体のときである．答

【想定配点】(60点)

(1)(計 30 点)

[1]　$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}\,S$
$=2(h^2+s^2+t^2)-2st-2\sqrt{3}(t-s)h$
までに $\boxed{10\text{点}}$.

[2]　$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}\,S$

$$=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{(s+t)^2}{2}\geqq 0$$

までに $\boxed{10\text{点}}$.

[3]　$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ に $\boxed{10\text{点}}$.

(2)(計 30 点)

[4]　①～④から⑤を導いて $\boxed{10\text{点}}$.

[5]　$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ から △OPQ が正三角形になることに触れて $\boxed{10\text{点}}$.
※もちろん (1) で触れても OK.

[6]　四面体 ABCD が正四面体のときに等号が成立することを示して $\boxed{10\text{点}}$.

$\boxed{2}$

次の等式が $1\leqq x\leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A, B を求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}}|\log y|f(xy)dy=3x(\log x-1)+A+\frac{B}{x}$$

ただし, $f(x)$ は $1\leqq x\leqq 2$ に対して定義される連続関数とする.

非常に多くの要素が詰め込まれた問題ではありますが, 計算量が膨大で, 完答は厳しいでしょう.

$\boxed{\text{解答}}$

$I=\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}}|\log y|f(xy)dy$ 　において　$xy=t$　とすると

$y=\dfrac{t}{x}$, $dy=\dfrac{dt}{x}$　から

$$I=\int_1^2\left|\log\frac{t}{x}\right|f(t)\frac{dt}{x}$$

y	$\frac{1}{x}$	$\to$	$\frac{2}{x}$
t	1	$\to$	2

$$=\frac{1}{x}\int_1^2|\log t-\log x|f(t)dt.$$

ここで, $1\leqq x\leqq 2$　であるから

$1\leqq t\leqq x$　のとき　$\log t-\log x\leqq 0$,

$x\leqq t\leqq 2$　のとき　$\log t-\log x\geqq 0$

より

$$xI=-\int_1^x(\log t-\log x)f(t)dt+\int_x^2(\log t-\log x)f(t)dt$$
$$=\log x\left\{\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt\right\}-\int_1^x f(t)\log t\,dt-\int_2^x f(t)\log t\,dt.$$

よって与式を x 倍して

$$xI=3x^2(\log x-1)+Ax+B. \qquad \cdots\cdots①$$

両辺を x で微分し

$$\frac{1}{x}\left\{\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt\right\}+\log x\cdot 2f(x)-2f(x)\log x$$
$$=3\left\{2x(\log x-1)+x^2\cdot\frac{1}{x}\right\}+A$$

より

$$\frac{1}{x}\left\{\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt\right\}=6x\log x-3x+A$$

から

$$\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt=6x^2\log x-3x^2+Ax. \qquad \cdots\cdots②$$

さらに両辺を x で微分し

$$2f(x)=6\left(2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)-6x+A$$
$$=12x\log x+A$$

ゆえ　$f(x)=6x\log x+\dfrac{A}{2}$.

ここで　$F(t)=\dfrac{3}{2}t^2(2\log t-1)+\dfrac{A}{2}t$

とすると　$F'(t)=f(t)$.

よって②より

$$2F(x)-F(1)-F(2)=6x^2\log x-3x^2+Ax \qquad \cdots\cdots③$$

$$6x^2\log x-3x^2+Ax-F(1)-F(2)=6x^2\log x-3x^2+Ax$$

$$-F(1)-F(2)=0$$

$$-\left(-\frac{3}{2}+\frac{A}{2}\right)-\{6(2\log 2-1)+A\}=0$$

$A=5-8\log 2$. 答

また

$$G(t)=\frac{3}{2}t^2\{2(\log t)^2-2\log t+1\}+\frac{A}{2}t(\log t-1) \qquad \cdots\cdots④$$

とすると　$G'(t)=f(t)\log t$.

よって①から

$$\log x\{2F(x)-F(1)-F(2)\}-2G(x)+G(1)+G(2)$$
$$=3x^2(\log x-1)+Ax+B. \qquad \cdots\cdots⑤$$

③と④から

$$\log x\{2F(x)-F(1)-F(2)\}-2G(x)$$
$$=\log x(6x^2\log x-3x^2+Ax)-3x^2\{2(\log x)^2-2\log x+1\}-Ax(\log x-1)$$
$$=3x^2\log x-3x^2+Ax$$

ゆえ⑤から

$$B=G(1)+G(2)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{5-8\log 2}{2}+6\{2(\log 2)^2-2\log 2+1\}+(5-8\log 2)(\log 2-1)$$
$$=4(\log 2)^2+5\log 2.$$ 答

【想定配点】(60点)

[1]　$xy=t$ の置換に$\boxed{10点}$.

[2]　$\displaystyle\int_1^2|\log t-\log x|f(t)dt$
$$=-\int_1^x(\log t-\log x)f(t)dt+\int_x^2(\log t-\log x)f(t)dt$$
に相当する部分に$\boxed{10点}$.

[3]　②に相当する部分に$\boxed{10点}$.

[4]　A の値を求めるまでに$\boxed{15点}$.

[5]　B の値を求めるまでに$\boxed{15点}$.

3

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1)　原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ．

(2)　複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$, $L\left(1, 1+\dfrac{i}{2}\right)$, $L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$, $L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$, $L(i, 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

「$\dfrac{z}{3+2i}$　が何を意味するかがわかってしまえば，後は単純作業で，答案の書き方に苦労する程度でそれほど難しいところはないでしょう」と言いたいところですが，複素数平面に苦手意識を持っている生徒は多いので，そうは問屋が卸さないでしょう．今まで類題を見たことがない出題ということもあり，敬遠してしまった生徒が多かったようです．

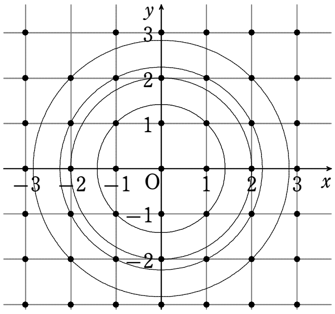
解答

(1)　$z=x+yi$（$x,\ y$ は整数）　とする．

「$\left|\dfrac{z}{3+2i}\right|$ が原点を中心とする半径 r の周または内部にある」

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z}{3+2i}\right| \leqq r \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leqq \sqrt{13}\,r \quad \cdots\cdots①$$

であるから，$N(r)$ は $|z| \leqq \sqrt{13}\,r$ を満たす z の個数に等しい．



上の図より

$\sqrt{13}\,r < 2 \quad \Leftrightarrow \quad N(r) \leqq 9,$

$2 \leqq \sqrt{13}\,r < \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad N(r) = 13,$

$\sqrt{5} \leqq \sqrt{13}\,r < 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad N(r) = 21,$

$2\sqrt{2} \leqq \sqrt{13}\,r \quad \Leftrightarrow \quad N(r) \geqq 25,$

より

$10 \leqq N(r) < 25 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqq \sqrt{13}\,r < 2\sqrt{2}$

から求める集合は　$\dfrac{2}{\sqrt{13}} \leqq r < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　答

(2)　$z=x+yi$（$x,\ y$ は整数）　とする．

また，6 つの線分で囲まれる領域を D とする．

変換　$w=\dfrac{z}{3+2i}$　において，w の軌跡は z の軌跡を回転拡大したものである．

$w=\dfrac{z}{3+2i}$　より　$z=(3+2i)w$　であるから

$D'=\{(3+2i)w \mid w \in D\}$

とすると

$\dfrac{z}{3+2i} \in D \quad \Leftrightarrow \quad z \in D'.$

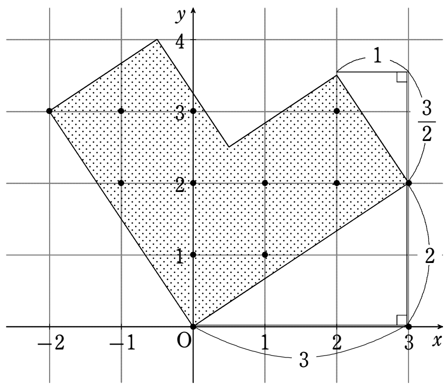
よって，まずは D' を求める．

$z=(3+2i)w$　において

$w=1$　のとき　$z=3+2i$

であり，D と D' は相似であることから，

D' は以下の打点部のようになる（境界を含む）．



よって，D' に含まれる z は 12 個．答

【想定配点】(60点)

(1)(計 30 点)

[1]　$|z| \leqq \sqrt{13}\,r$, $|z| = \sqrt{13}\,r$ などに $\boxed{10\text{点}}$.

※解法がこの解答と異なる場合でも，その解法が正しければ解法に 10 点を与える．

[2]　$\dfrac{2}{\sqrt{13}} \leqq r < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ に$\boxed{20\text{点}}$.

※ $\dfrac{2}{\sqrt{13}} \leqq r$ だけ，$r < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ だけが正しいものは $\boxed{10\text{点}}$.

(2)(計 30 点)

[3]　D' を求める方針に$\boxed{5\text{点}}$，D' に$\boxed{10\text{点}}$.

※解法がこの解答と異なる場合でも，その解法が正しければ解法に 15 点を与える．

[4]　結論に $\boxed{15\text{点}}$.

$\boxed{4}$

$H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$.
- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$.
- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$.
- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$

である．

(1)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち2番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち3番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

その場で考える実験系の問題として大学は出題したのでしょうが，さすがにこれは類題経験がないと時間内には解けないでしょう．ちょっと東工大らしくない出題です．

あと，(3) の実現可能性の議論が大変で，数学的にどうこう言う以前に解答用紙に収めることが物理的に不可能だと思うんですが ….

解答

(1)　まず，平面 P を直線 $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \cdots,\ \ell_n$ で分割する (直線は一致してもよい) とき，その分割された領域の個数を $U(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ と表す．

次に，$U(\ell_1, \cdots, \ell_k)$ に対し $U(\ell_1, \cdots, \ell_k, \ell_{k+1})$ を考える．ℓ_{k+1} を P に書き加えることにより，ℓ_{k+1} は $\ell_1, \cdots, \ell_k$ と最大 k 個の交点を持つので，ℓ_{k+1} は最大 $(k+1)$ 個の区間に分割されるので

$$U(\ell_1, \cdots, \ell_k, \ell_{k+1})-U(\ell_1, \cdots, \ell_k) \leqq k+1. \quad \cdots\cdots①$$

これを　$k=1$　から　$k=n-1$ まで加えると，$n \geqq 2$ において

$$U(\ell_1, \cdots, \ell_n)-U(\ell_1) \leqq 2+3+\cdots+n$$

より，$U(\ell_1)=2$ もあわせて

$$U(\ell_1, \cdots, \ell_n) \leqq \frac{1}{2}(n^2+n+2).$$

この等号は，$\ell_1, \cdots, \ell_n$ のいずれもが平行でなく，3 本以上が 1 点で交わらないときに起こる．

よって $U(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ の最大値は $\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$ であり，これは　$n=1$　でも成り立つ．

次に，n 本以下の直線で平面 P を分割するときの領域の個数の最大値を a_n とすると，

$\left\{\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)\right\}$ が単調増加数列であることから

$$a_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

である．

次に，$T(H_1, \cdots, H_k)$ に対し $T(H_1, \cdots, H_k,\ H_{k+1})$ を考える．H_{k+1} を加えることにより，H_{k+1} は $H_1, \cdots, H_k$ と最大 k 個の交線を持つので，H_{k+1} は最大 a_k 個の区間に分割される．よって

$$T(H_1, \cdots, H_k,\ H_{k+1})-T(H_1, \cdots, H_k) \leqq a_k. \quad \cdots\cdots②$$

②を　$k=1$　から　$k=n-1$ まで加えると，$n \geqq 2$ において

$$T(H_1, \cdots, H_n)-T(H_1) \leqq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

より　$T(H_1)=2$　から

$$T(H_1, \cdots, H_n) \leqq \frac{n^3+5n+6}{6}.$$

この等号は，$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_n$ について

「どの 2 面も交線を持ち，その交線がいずれも平行でなく，かつ 3 本以上が 1 点で交わらない」 $\cdots\cdots(*)$

ときに起こる

よって $T(H_1, \cdots, H_n)$ の最大値は　$\dfrac{n^3+5n+6}{6}$.

これは $n=1$ でも成り立つ．答

以後，$b_n=\dfrac{n^3+5n+6}{6}$　とする．

(2)　$T(H_1, \cdots, H_n)$ は自然数であるから

$$T(H_1, \cdots, H_n)=b_n-1 \quad \cdots\cdots③$$

が実現すれば，これが求める値である．

$n=2$ のとき，$H_1 /\!/ H_2$ とすると $T(H_1, H_2)=3$ であり，また　$b_2-1=3$　から③は成り立つ．

次に，$n \geqq 3$　において

「$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_{n-1}$ について $(*)$ が成り立ち」，

「$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ で H_i と H_n が交線 ℓ_i を持ち」，

「$\ell_1, \cdots, \ell_{n-1}$ は 3 本以上が 1 点で交わらず」，

「$\ell_1, \cdots, \ell_{n-2}$ のいずれもが平行でなく，$\ell_1 /\!/ \ell_{n-1}$ である」

とすると，(1) の経過より b_n よりも分割数が 1 だけ小さくなるので③が成立する．

以上より，求める値は　$b_n-1=\dfrac{n^3+5n}{6}$． 答

(3)　$T(H_1,\cdots,H_n)$ は自然数であるから

$$T(H_1,\cdots,H_n)=b_n-2 \qquad \cdots\cdots④$$

が実現すれば，これが求める値である．
$n=3$ のとき，$H_1 \parallel H_2 \nparallel H_3$ とすると
$T(H_1,H_2,H_3)=6$　であり，また　$b_3-2=6$
から④は成り立つ．
次に，$n\geqq 5$　において
「$H_1,\ H_2,\ \cdots,H_{n-1}$ について (*) が成り立ち」，
「$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ で H_i と H_n が交線 ℓ_i を持ち」，
「$\ell_1,\cdots,\ell_{n-1}$ は 3 本以上が 1 点で交わらず」，
「$\ell_1,\cdots,\ell_{n-3}$ のいずれもが平行でなく，
$\ell_{n-2}\parallel\ell_1\nparallel\ell_2\parallel\ell_{n-1}$ である」
とする．$\ell_{n-2}\parallel\ell_1\nparallel\ell_2\parallel\ell_{n-1}$ は，$n=4$ では成り立たないことに留意する．
このとき，(1) の経過より b_n よりも分割数が 2 だけ小さくなるので④が成り立つ．
ところが　$n=4$　では④は成り立たない．
証明は後述．

$$T(H_1,\cdots,H_4)=b_4-3$$

すなわち

$$T(H_1,\cdots,H_4)=12$$

は例えば
$H_1\colon x=0$，$H_2\colon y=0$，$H_3\colon x+y=0$，$H_4\colon z=0$
で実現可能．

よって　$b_n-2=\dfrac{n^3+5n-6}{6}$　より求める値は

$$\begin{cases} \dfrac{n^3+5n-6}{6} & (n=3,\ n\geqq 5) \\ 12 & (n=4) \end{cases}$$ 答

④が　$n=4$　で成り立たないことの証明：
$b_4-2=13$　より，$T(H_1,H_2,\ H_3,\ H_4)=13$　が成り立たないことを示す．
(1)　と同様に
(a)　空間を H_1 で区切ると 2 領域に分割される
(b)　(a) を H_2 で区切ると領域が c_1 だけ増える
(c)　(b) を H_3 で区切ると領域が c_2 だけ増える
(d)　(c) を H_4 で区切ると領域が c_3 だけ増える
とすると

$$T(H_1,H_2,\ H_3,\ H_4)=2+c_1+c_2+c_3$$

であるから

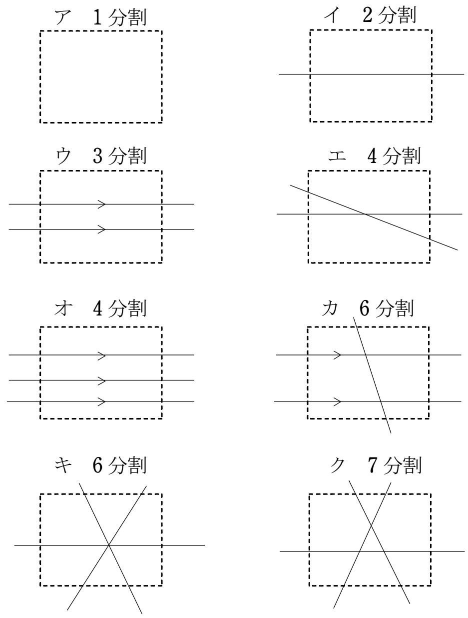
$$2+c_1+c_2+c_3=13$$

すなわち

$$c_1+c_2+c_3=11 \qquad \cdots\cdots⑤$$

を満たす c_1，c_2，c_3 を考える．

P を 0 〜 3 本の直線で分割する方法を列挙すると以下の通り．ただし点線の長方形は P を表す．



よって，(b)，(c)，(d) で差し込んだ平面の分割の可能性は
(b) … ア〜イ，(c) … ア〜エ，(d) … ア〜ク
であり，c_1，c_2，c_3 の値域は
$c_1=1,\ 2,$　$c_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,$
$c_3=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$
であるから，⑤を満たす可能性があるのは
$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(1,\ 3,\ 7),\ (1,\ 4,\ 6),\ (2,\ 2,\ 7),$
$(2,\ 3,\ 6)$
のとき，つまり
(あ)　(b)：ア，(c)：ウ，(d)：ク
(い)　(b)：ア，(c)：エ，(d)：カ or キ
(う)　(b)：イ，(c)：イ，(d)：ク
(え)　(b)：イ，(c)：ウ，(d)：カ or キ
のときのみである．
(d) でキまたはクが起こるとき，H_1 〜 H_4 はどれも平行ではない．　……⑥
(あ) のとき，(b)：ア より $H_1\parallel H_2$ であるが，これは⑥と矛盾する．
(い) のとき，(b)：ア より $H_1\parallel H_2$ であるが，このとき (c)：エは起きない．
(う) のとき，(b)：イ，(c)：イ より $H_1\parallel H_3$ または $H_2\parallel H_3$ であるが，これは⑥と矛盾する．

ここで，H_m と H_n の交線を $[m,\ n]$ と表す．
後のために，以下の補題を示す：

補題

異なる3つの自然数 k, m, n および異なる2直線 $[k,\ n]$ と $[m,\ n]$ が存在するとき

$$[k,\ n]/\!/[m,\ n] \Longrightarrow [k,\ n]/\!/[m,\ n]/\!/[k,\ m] \quad \cdots\cdots ⑦$$

補題 の 証明

$[k,\ n]/\!/[m,\ n]$ より $H_k/\!/[m,\ n]$.

よって $H_k \cap [m,\ n]=\varnothing$ であり，$[k,\ m]\subset H_k$ より $[k,\ m]\cap[m,\ n]=\varnothing$.

ところで，$[k,\ m]\subset H_m$，$[m,\ n]\subset H_m$ より，$[k,\ m]$ と $[m,\ n]$ は平行か交わるかのいずれかである．

よって $[k,\ m]/\!/[m,\ n]$ であるから示された．終

(え)のとき，(c)：ウより $[1,\ 3]/\!/[2,\ 3]$ がいえるので，⑦より

$[1,\ 2]/\!/[1,\ 3]/\!/[2,\ 3]$. ……⑧

よって　$H_1\cap H_2\cap H_3=\varnothing$.

ところがキが起こるには $H_1\cap H_2\cap H_3\fallingdotseq\varnothing$ が必要なのでキは起きない．

次にカが起きるかどうかを検証する．

カより $[1,\ 4]$, $[2,\ 4]$, $[3,\ 4]$ の3本のうち2本だけが平行であるから $[1,\ 4]/\!/[2,\ 4]\not\parallel[3,\ 4]$ ……⑨ としても一般性を失わない．

⑦と⑨より　$[1,\ 4]/\!/[2,\ 4]/\!/[1,\ 2]$.

これと⑧より　$[2,\ 3]/\!/[2,\ 4]$.

再び⑦より　$[2,\ 3]/\!/[2,\ 4]/\!/[3,\ 4]$.

これは⑨と矛盾する．

よってカは起きないので，(え)は起きない．

以上より，④が　$n=4$　で成り立たないことがようやく示された．終

【想定配点】(60点)

(1)(計30点)

[1]　$a_n=\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$ に相当する部分に $\boxed{10点}$.

[2]　$U(\ell_1,\cdots,\ell_n)$ が最大になる状況に $\boxed{5点}$.

[3]　$\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ に $\boxed{10点}$.

[4]　$T(H_1,\cdots,H_n)$ が最大になる状況に $\boxed{5点}$.

(2)(計10点)

[5]　$\dfrac{n^3+5n}{6}$ に $\boxed{5点}$.

[6]　$T(H_1,H_2)=3$ が実現可能であることに $\boxed{5点}$.

(3)(計20点)

[7]　$\dfrac{n^3+5n-6}{6}$ に $\boxed{5点}$($n\fallingdotseq 4$ に気付いてなくてもよい).

[8]　$T(H_1,H_2,H_3)=6$ が実現可能であることに $\boxed{5点}$.

[9]　$T(H_1,H_2,H_3,H_4)=12$ が実現可能であることに $\boxed{5点}$.

[10]　$T(H_1,H_2,H_3,H_4)=13$ が実現不可能であることに $\boxed{5点}$.

$\boxed{5}$

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2)　数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

(1) と (2) の関連さえわかればオーソドックスな問題です．これを外すと厳しいです．

解答

(1)　$x>0$　を前提とする．

$$\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}'=\left\{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}'$$
$$=\{\log(x+1)-\log x\}'$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}$$

より

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\cdot\left\{-\frac{1}{x(x+1)}\right\}$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x},$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0.$$

また　$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$　から　$f'(x)<0$. 終

(2)　$k\geqq 2$　として，$b_{k-1}<b_k$　を同値変形すると

$$\frac{k^k}{a^{k-1}(k-1)!}<\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}$$
$$a<\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}$$
$$a<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$
$$\log a<(k+1)\log\left(1+\frac{1}{k}\right).\ (\text{両辺}>0\text{ より})$$

また

$$\log a=4\log\frac{4}{3}=(3+1)\log\left(1+\frac{1}{3}\right)=f(3)$$

であり，(1) より $f(x)$ は　$x>0$　で単調減少であるから

$$b_{k-1}<b_k \iff f(3)<f(k) \iff k<3$$

よって　b_{k-1} と b_k の大小は k と 3 の大小に一致するので

$$b_{k-1}<b_k \iff k=1,\ 2,$$
$$b_{k-1}=b_k \iff k=3,$$
$$b_{k-1}>b_k \iff k\geqq 4$$

ゆえ

$$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$$

であるから，$b_k=M$ となるのは　$k=2,\ 3$. 答

また

$$M=b_2$$
$$=\frac{3^3}{a^2\cdot 2!}=\frac{3^8}{2^{16}}\cdot\frac{3^3}{2}=\frac{3^{11}}{2^{17}}=\frac{177147}{131072} \quad \text{答}$$

【想定配点】(60点)

(1)(計 15 点)

[1]　$f''(x)=\dfrac{1}{x^2(x+1)}>0$ に $\boxed{10\text{ 点}}$.

[2]　$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ に $\boxed{5\text{ 点}}$.

(2)(計 45 点)

[3]　$b_{k-1}<b_k$，$b_k<b_{k+1}$　などを同値変形する方針，あるいは　$\dfrac{b_k}{b_{k-1}}$，$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}$，b_k-b_{k-1}，$b_{k+1}-b_k$ を変形する方向に $\boxed{5\text{ 点}}$.

[4]　$b_{k-1}<b_k \iff f(3)<f(k)$　に $\boxed{20\text{ 点}}$.

[5]　$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$　に $\boxed{10\text{ 点}}$.

[6]　$k=2,\ 3$　に $\boxed{5\text{ 点}}$.

[7]　$M=\dfrac{177147}{131072}$　に $\boxed{5\text{ 点}}$.