東工大　2018　二次試験　数学講評

＜難易度　例年との比較＞

昨年は難しいセットでしたが，今年もそれと同等の難しさです．比較的易しい $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ もつまずく要素が満載で，$\boxed{4}$(2) と $\boxed{5}$(3) は難問です．4 割取れていれば他教科次第，100 点近くでも合格者は多数出てくると思います．

＜傾向と対策＞

東工大は得点開示を始めてからは問題が一時的に易しくなりましたが，近年は以前のレベルに戻っています．

一昨年の出題は数Ⅲが特に少なくなっていましたが，昨年は $\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$ に数Ⅲが絡んできており，今年も $\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が数Ⅲと，数Ⅲ重視の傾向に回帰しています．特に $\boxed{4}$ の体積の問題は，近年見かけない高レベルの出題で，過去問を数年分解いただけの受験生には厳しいと思います．

整数はここ 5 年連続の出題で，一昔前に見られた高度な題材ではなく，整数の本質を問う良問が出題されています．だからこそ付け焼刃は通用しませんから，腰を据えて学ぶ必要があります．

計算量も留意すべきポイントで，ノートの見開きでも計算スペースが足らないほどの重量級の問題にどれだけ取り組んできたかが勝負の分かれ目になりそうです．

＜その他＞

東工大の数学は 5 点刻みで採点されます (開示得点が過去 8 年分すべて 5 の倍数です)．よって，あまりに細かい議論については部分点が設定されないことも多くあると予想できます．

東工大　2018　二次試験　数学解答

$\boxed{1}$

a，b，c を実数とし，3 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+1=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+bx+2=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x^2+cx+3=0 \quad \cdots\cdots ③$$

の解を複素数平面上で考察する．

(1)　2 つの方程式 ①，② がいずれも実数解を持たないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ．また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a，b を用いて表せ．

(2)　3 つの方程式 ①，②，③ がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．

『実数係数の 2 次方程式は，虚数解を持つならばその虚数解は互いに共役である』ということ以外には注意すべき点はないはずですが，複素数平面に苦手意識を持つ受験生は多く，現場の感覚からもこの問題は楽勝とはいかないと思います．

解答

(1)　①，②が実数解を持たない，すなわち虚数解を持つので

$$a^2-4<0,\ b^2-8<0$$

が成り立つので，この下で考える．

①，②は実数係数なので，①の虚数解は α，$\overline{\alpha}$，②の虚数解は β，$\overline{\beta}$ とおける．

$\mathrm{Re}\,\alpha=\mathrm{Re}\,\beta$ のとき，α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ は同一直線上に並ぶ．

$\mathrm{Re}\,\alpha\neq\mathrm{Re}\,\beta$ のとき，α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ は等脚台形をなすので，ゆえに同一円周上にある．終

このとき，

①の解は

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{4-a^2}\,i}{2}$$

より

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{4-a^2}\,i}{2}$$

としてよい．

②の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{8-b^2}\,i}{2}.$$
より
$$\beta=\frac{-b+\sqrt{8-b^2}\,i}{2}$$
としてよい.
$\mathrm{Re}\,\alpha\fallingdotseq\mathrm{Re}\,\beta$ より
$$\frac{-a}{2}\fallingdotseq\frac{-b}{2}\quad\text{すなわち}\quad a\fallingdotseq b.$$
また等脚台形は実軸について対称であるから,円の中心を表す複素数は d (d は実数) とおけ
$$|d-\alpha|=|d-\beta|$$
より
$$|d-\alpha|^2=|d-\beta|^2$$
$$\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\right)^2=\left(d+\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{8-b^2}}{2}\right)$$
$$(2d+a)^2+4-a^2=(2d+b)^2+8-b^2$$
$$4(a-b)d=4$$
$$d=\frac{1}{a-b}\quad(\ a\fallingdotseq b\text{ より })$$
より中心は $\dfrac{1}{a-b}$. 答
また半径は
$$\sqrt{\left(\frac{1}{a-b}+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{4-a^2}{4}}\quad\text{答}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{a}{a-b}+1}\quad\text{答}$$
$$=\frac{1}{|b-a|}\sqrt{2a^2-3ab+b^2+1}.\quad\text{答}$$
(2) ①,②,③が実数解を持たない,すなわち虚数解を持つので
$$a^2-4<0,\ b^2-8<0,\ c^2-12<0\quad\cdots\cdots\cdots④$$
が成り立つので,この下で考える.
③は実数係数なので,その解は γ, $\overline{\gamma}$ とおけ,
$$\gamma=\frac{-c+\sqrt{12-c^2}\,i}{2}$$
としてよい.
例えば $a=b$ のときは,α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ は実部が等しく,しかもこの 4 点は異なるので題意を満たさないので $a\fallingdotseq b$ である.
同様に $a\fallingdotseq c$, $b\fallingdotseq c$ であるから,以下
$$a\fallingdotseq b,\ a\fallingdotseq c,\ b\fallingdotseq c\quad\cdots\cdots\cdots⑤$$
および④を前提とする.
この下で,①と②の解を通る円の中心は (1) より
$$\frac{1}{a-b}.$$
また,①の解と③の解を通る円の中心は (1) と同様に
$$\frac{2}{a-c}$$
であるから,求める条件は
$$④\quad\text{かつ}\quad⑤\quad\text{かつ}\quad\frac{1}{a-b}=\frac{2}{a-c}$$
すなわち
$$a^2-4<0,\ b^2-8<0,\ c^2-12<0,$$
$$a\fallingdotseq b,\ a\fallingdotseq c,\ b\fallingdotseq c,$$
$$2b=a+c.$$ 答

参考

$2b=a+c$ すなわち $b=\dfrac{a+c}{2}$ を前提とすると
$a\fallingdotseq b\Longleftrightarrow(\ a\fallingdotseq c$ かつ $b\fallingdotseq c\ )$
が言えるので,(2) の結論は
$a\fallingdotseq b$, $a\fallingdotseq c$, $b\fallingdotseq c$ のうち 1 つでも書いてあれば OK です.

【想定配点】(60点)

(1)(計 35 点)
[1] ①,②の虚数解が共役であることの言及または図示に 5 点.
[2] $\mathrm{Re}\,\alpha=\mathrm{Re}\,\beta$ のとき同一直線上に並ぶことに 5 点.
[3] $\mathrm{Re}\,\alpha\fallingdotseq\mathrm{Re}\,\beta$ のとき等脚台形をなすことに 5 点.
[4] 中心 $\dfrac{1}{a-b}$ に 15 点.
※ $a\fallingdotseq b$ がなければ 10 点.
[5] 半径に 5 点.
(2)(計 25 点)
[6] $\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{2}{a-c}$ に相当する部分に 15 点.
[7] $a\fallingdotseq b$, $a\fallingdotseq c$, $b\fallingdotseq c$ のいずれかに 5 点.
[8] $a^2-4<0$, $b^2-8<0$, $c^2-12<0$ に 5 点.

2

次の問に答えよ.

(1)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 (x, y, z) を一組求めよ.

(2)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 (x, y, z) の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの, およびその最小値を求めよ.

(1) は「一組求めよ」とあります. 東工大お得意の「実験してみよ」とのメッセージなので, $x=0, 1$ を代入していくと,

$$91y+65z=3,\ 91y+65z=-33$$

を得ますが, これらは整数解を持ちません. その理由が分かれば, 解答の着想が得られます.

解答

整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表す.

(1)　$(x, y, z)=(-4, -2, 5)$　答

※「一組求めよ」とあるので, 経過によらず $35x+91y+65z=3$ の整数解であれば OK.

(2)　$35x+91y+65z=3$

より

$$35x+13(7y+5z)=3. \quad \cdots\cdots ①$$

ここで $7y+5z=w$ ($w\in\mathbb{Z}$) とおくと

$$35x+13w=3.$$

ここで $35\cdot(-4)+13\cdot 11=3$ に留意し

$$35(x+4)+13(w-11)=0$$

$$35(x+4)=-13(w-11)$$

35 と 13 は互いに素であるから

$$x+4=13n,\ w-11=-35n \quad (n\in\mathbb{Z})$$

より

$$x=13n-4,\ w=-35n+11.$$

(ア)　$n=0$ のとき

$x=-4$, $w=11$ より

$$7y+5z=11$$

$$z=\frac{-7y+11}{5}. \quad \cdots\cdots ②$$

$|y|=0$, $|y|=1$ のとき, ②より $z\notin\mathbb{Z}$.

$|y|=2$ のとき, ②の解は $(y, z)=(-2, 5)$.

よって y^2 の最小値は $(-2)^2=4$.

ゆえに x^2+y^2 は, $(x, y, z)=(-4, -2, 5)$ のときに最小値 $(-4)^2+(-2)^2=20$ をとる.

(イ)　$n\neq 0$ のとき

このとき $|x|\geqq 9$ すなわち $x^2\geqq 81$ となるので,

$$x^2+y^2\geqq 81>20$$

より (イ) において x^2+y^2 は最小値をとらない.

(ア), (イ) より, x^2+y^2 は $(x, y, z)=(-4, -2, 5)$ のときに最小値 20 をとる. 答

【想定配点】(60点)

(1)(計 15 点)

[1]　$35x+91y+65z=3$ の整数解に $\boxed{15点}$.

※「一組求めよ」とあるので, 経過によらず $35x+91y+65z=3$ の整数解であれば OK.

(2)(計 45 点)

[2]　$x=13n-4$, $y=5n+3$, $5x+13y=65n+19$ などの一般解に $\boxed{15点}$.

[3]　$(x, y, z)=(-4, -2, 5)$ に $\boxed{10点}$.

[4]　最小値 20 に $\boxed{5点}$.

[5]　最小性を示すのに $\boxed{15点}$.

※内容によって適当に判断する.

3

方程式

$$e^x(1-\sin x)=1$$

について，次の問に答えよ．

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ．また，正の実数解を無限個持つことを示せ．

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて a_1，a_2，a_3，$\cdots$ とし，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n$ とおく．このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ．

東工大頻出の，解の存在証明と解を評価するはさみうちの問題です．これは何とかしたいところ．

解答

(1) $\quad e^x(1-\sin x)=1$

$\iff e^x(1-\sin x)-1=0 \quad \cdots\cdots(*)$

より

$$f(x)=e^x(1-\sin x)-1 \quad (-\infty<x<\infty)$$

とすると

$$f'(x)=e^x(1-\sin x-\cos x).$$

ここで $f'(x)\geqq 0$ とすると，$e^x>0$ より

$$1-\sin x-\cos x\geqq 0$$
$$\sin x+\cos x\leqq 1$$
$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

から，n を整数とすると

$$-\frac{5}{4}\pi+2n\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{4}+2n\pi$$
$$\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi\leqq x\leqq 2n\pi.$$

ここで

$$f\left(\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi\right)=-1$$

であり

$$f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1=c_n$$

とおく．c_n の符号を調べると

$n\geqq 1$ のとき $c_n>0$,

$n=0$ のとき $c_n=0$,

$n\leqq -1$ のとき $c_n<0$.

さらに区間 I_n を

$$I_n=\{x\mid 2n\pi\leqq x<2(n+1)\pi\}$$

とすると，I_n における $f(x)$ の増減は以下:

x	$2n\pi$	$\cdots$	$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$	$\cdots$	$(2(n+1)\pi)$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	c_n	$\searrow$	-1	$\nearrow$	(c_{n+1})

(ア) $n\leqq -1$ のとき

$c_n<0$，$c_{n+1}\leqq 0$ (等号成立は $n=-1$) より，$(*)$ は I_n において実数解を持たない．

(イ) $n=0$ のとき

$c_0=0$，$c_1>0$ より，$(*)$ は I_n において $x=0$ と正の実数解を 1 つ持つ．

(ウ) $n\geqq 1$ のとき

$c_n>0$，$c_{n+1}>0$ より，$(*)$ は I_n において実数解を 2 つ持つ．

よって示された．終

(2) (1) の考察より，

$$\frac{\pi}{2}<a_1<2\pi,\ 2\pi<a_2<\left(2+\frac{1}{2}\right)\pi,$$
$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\pi<a_3<2\cdot 2\pi,$$
$$2\cdot 2\pi<a_4<\left(2\cdot 2+\frac{1}{2}\right)\pi,$$
$$\cdots$$

となるので，不等式をゆるめて

$$(n-1)\pi<a_n<(n+1)\pi$$

が成り立つ．これより

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)\pi<S_n<\sum_{k=1}^{n}(k+1)\pi$$
$$\pi\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}<S_n<\pi\left\{\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}$$
$$\pi\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right\}<\frac{S_n}{n^2}<\pi\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right\}.$$

ここで $n\to\infty$ とすると，この式の最左辺・最右辺はともに $\frac{\pi}{2}$ に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}.$$ 答

【想定配点】(60点)

(1)(計 45 点)

[1] $f'(x)=0\iff x=\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi$，$2n\pi$ に $\boxed{10\text{ 点}}$．

[2] $f\left(\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi\right)=-1$ に $\boxed{5\text{ 点}}$．

[3] $f(2n\pi)=0\iff n=0$ に $\boxed{5\text{ 点}}$．

[4] $f(x)$ の増減に $\boxed{10\text{ 点}}$．

[5] (ア)，(イ)，(ウ) に相当する内容に $\boxed{5\text{ 点}\times 3}$．

(2)(計 15 点)

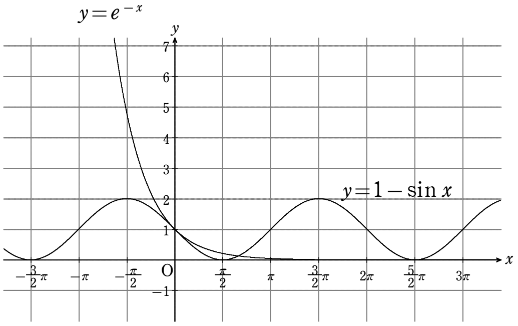
[6] $\frac{S_n}{n^2}$ をはさむ不等式に $\boxed{10\text{ 点}}$．

[7] $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$ に $\boxed{5\text{ 点}}$．

参考

$$e^x(1-\sin x)=1 \Longleftrightarrow 1-\sin x=e^{-x}$$

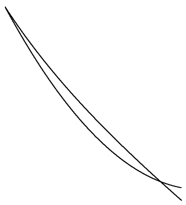
より，$y=1-\sin x$ と $y=e^{-x}$ のグラフを考える方法も考えられます．



この方法だと，(1) を示すのには注意点があり，(2) では大きく難があります．

(1) では，正の解を無数に持つことは問題なく示せますが，負の解を持たないことを示すには，例えば $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ において $y=e^{-x}$ が下に凸，$y=1-\sin x$ が上に凸であることなどを述べなくてはなりません．

(2) では，例えば $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の区間で $y=e^{-x}$ は単調減少で下に凸，$y=1-\sin x$ も単調減少で下に凸なので，この区間で右図のような上下の入れ替わりが起きる可能性を否定できません．



ただ，もしかすると減点されないかもしれませんし，されたとしてもそれほど大きな減点ではないと思います．

4

xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2\leqq 1,\quad |z|\leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2)$，$(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を ℓ とする．

(1) $|t|\leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする．また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする．L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ．

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ．

立体版の斜軸回転の問題です．それだけでも難しいのに，(2) の問題の解釈と，(1) のヒントを結びつけるのが大変．さらに断面積は場合分けが入り，しかも $t^2-4\sqrt{2}\,t+8=(t-2\sqrt{2})^2$ に気づかないと積分計算が大変で，てんこもりすぎです．試験場で完答するのは厳しいでしょう．

解答

(1) H_t の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

より，H_t 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{t}{\sqrt{2}}\\0\\\dfrac{t}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}=0$$

$$x-\frac{t}{\sqrt{2}}+z-\frac{t}{\sqrt{2}}=0$$

$$x+z=\sqrt{2}\,t. \qquad \cdots\cdots①$$

また，L_θ 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$x=2\cos\theta,\quad y=\sin\theta. \qquad \cdots\cdots②$$

よって L_θ と H_t との交点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とすると①，②を連立し，

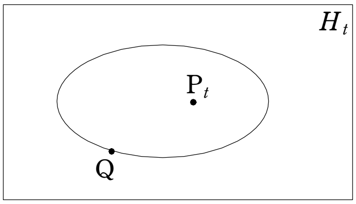
$$x=2\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad 2\cos\theta+z=\sqrt{2}\,t$$

より

$$\mathrm{Q}(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ -2\cos\theta+\sqrt{2}\,t),$$

求める z 座標は $-2\cos\theta+\sqrt{2}\,t$ である．答

(2)　まず，V を ℓ について回転させた領域を W とすると，求める体積は，$V\cap W$ の体積である．
証明は後述．　……$(*)$
まず W を考えるために，まず t を固定し，H_t と V の交わりを考える．



θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で変化させると，Q は H_t 上を動く．この軌跡が V の側面を H_t で切断したものである．さらに，この軌跡を P_t を中心に 1 回転させたものが W を H_t で切断したものである．
よって，$\left|\overrightarrow{P_tQ}\right|^2$ の最小値を $m(t)$ とすると，
$V\cap W$ を H_t で切断したときの断面積は

$$\pi m(t)$$

である．またこの考察より，$V\subset X$ なる領域 X を考えると，V を ℓ について回転させた領域を H_t で切断したときの断面積も $\pi m(t)$ に等しく，$(*)$ は示された．
よって $m(t)$ を求める．

$$\left|\overrightarrow{P_tQ}\right|^2$$
$$=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\sin^2\theta$$
$$+\left(-2\cos\theta+\frac{t}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,t\right)^2$$
$$=8\cos^2\theta+\sin^2\theta-4\sqrt{2}\,t\cos\theta+t^2.$$

ここで $\cos\theta=u$　$(-1\leqq u\leqq 1)$ とし，
$\left|\overrightarrow{P_tQ}\right|^2=f(u)$ とすると

$$f(u)=8u^2+(1-u^2)-4\sqrt{2}\,tu+t^2$$
$$=7u^2-4\sqrt{2}\,tu+(t^2+1)$$
$$=7\left(u-\frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2+\left(-\frac{t^2}{7}+1\right).$$

「P_t が V に含まれる」$\Longleftrightarrow |t|\leqq 2\sqrt{2}$，
$|t|\leqq 2\sqrt{2} \Longrightarrow$「Q は V に含まれる」
にも留意する．
さらに，$\left|\overrightarrow{OP_t}\right|=|t|$ であるから
求める体積を A とすると，対称性も考え

$$A=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}} m(t)dt\,.$$

(ア)　$0\leqq\dfrac{2\sqrt{2}}{7}t\leqq 1$　すなわち　$0\leqq t\leqq\dfrac{7}{2\sqrt{2}}$ のとき

$$m(t)=f\left(\frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)=-\frac{t^2}{7}+1.$$

(イ)　$1\leqq\dfrac{2\sqrt{2}}{7}t$ すなわち　$\dfrac{7}{2\sqrt{2}}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ のとき

$$m(t)=f(1)=t^2-4\sqrt{2}\,t+8=(t-2\sqrt{2})^2.$$

よって

$$\frac{A}{2\pi}$$
$$=\int_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}}\left(-\frac{t^2}{7}+1\right)dt+\int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}(t-2\sqrt{2})^2dt$$
$$=\left[-\frac{t^3}{21}+t\right]_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}}+\frac{1}{3}\Big[(t-2\sqrt{2})^3\Big]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{7}{4}\sqrt{2}-\frac{49}{96}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{32}\right)$$
$$=\left(\frac{7}{4}-\frac{49}{96}+\frac{1}{96}\right)\sqrt{2}$$
$$=\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{5}{4}\sqrt{2}$$

から

$$A=\frac{5}{2}\sqrt{2}\,\pi.$$ 答

【想定配点】(60点)

(1)(計 10 点)
　[1]　結論に $\boxed{10\text{点}}$．
(2)(計 50 点)
　[2]　求める立体の断面積が $\pi m(t)$ であることに $\boxed{10\text{点}}$．
　※内容に応じて適当に採点．
　[3]　$\left|\overrightarrow{OP_t}\right|=|t|$ に $\boxed{5\text{点}}$．
　[4]　$A=2\pi\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} m(t)dt$ や $A=\pi\displaystyle\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} m(t)dt$ に $\boxed{5\text{点}}$．
　[5]　$0\leqq t\leqq\dfrac{7}{2\sqrt{2}}$ に $\boxed{5\text{点}}$．
　[6]　$m(t)=-\dfrac{t^2}{7}+1$ に $\boxed{5\text{点}}$．
　[7]　$\dfrac{7}{2\sqrt{2}}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$ に $\boxed{5\text{点}}$．
　[8]　$m(t)=t^2-4\sqrt{2}\,t+8$ に $\boxed{5\text{点}}$．
　[9]　A に $\boxed{10\text{点}}$．π 抜けは $\boxed{5\text{点}}$．

5

xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

を Q とする．点 X は頂点A $(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する．X が x 軸，y 軸，z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p，q，r である．ただし，

$$p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0,\quad p+q+r=1$$

である．Xが n 秒後に頂点A $(0,\ 0,\ 0)$，B $(1,\ 1,\ 0)$，C $(1,\ 0,\ 1)$，D $(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．

(1)　a_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n と p，q，r を用いて表せ．

(2)　$a_n-b_n+c_n-d_n$ を p，q，r，n を用いて表せ．

(3)　a_n を p，q，r，n を用いて表せ．

素材は最近よく見かける 1 つ飛ばしの確率漸化式の問題なのですが，(2) から (3) への飛躍がかなり難しく，完答は厳しいでしょう．

解答

(1)　X が x 軸，y 軸，z 軸に平行に進む移動を

A から 2 秒後に A に移動する確率は $p^2+q^2+r^2$，
B から 2 秒後に A に移動する確率は $2pq$，
C から 2 秒後に A に移動する確率は $2pr$，
D から 2 秒後に A に移動する確率は $2qr$．
また，これ以外に 2 秒後に A に移動する方法は存在しないので

$$a_{n+2}$$
$$=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2prc_n+2qrd_n.\quad 答$$

……①

(2)(3)

(ア) n が奇数のとき
X は A，B，C，D のいずれにも存在しえないので

$$a_n=b_n=c_n=d_n=0$$

すなわち

$$a_n-b_n+c_n-d_n=0,\quad a_n=0.\quad 答$$

(イ) n が偶数のとき
X は A，B，C，D のいずれかに必ず存在するので

$$a_n+b_n+c_n+d_n=1. \qquad ……②$$

また (1) と同様に

$$b_{n+2}$$
$$=2pqa_n+(p^2+q^2+r^2)b_n+2qrc_n+2prd_n,$$

$$c_{n+2}$$
$$=2pra_n+2qrb_n+(a^2+b^2+c^2)c_n+2pqd_n,$$

$$d_{n+2}$$
$$=2qra_n+2prb_n+2pqc_n+(a^2+b^2+c^2)d_n.$$

よって

$$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}$$
$$=(p^2+q^2+r^2-2pq+2pr-2qr)$$
$$\cdot(a_n-b_n+c_n-d_n).$$

また

$$a_0=1,\quad b_0=c_0=d_0=0$$

より

$$a_0-b_0+c_0-d_0=1$$

から

$$a_n-b_n+c_n-d_n$$
$$=(p^2+q^2+r^2-2pq+2pr-2qr)^{\frac{n}{2}}$$
$$=\{(p-q+r)^2\}^{\frac{n}{2}}$$
$$=(p-q+r)^n.\quad 答 \qquad ……③$$

同様に

$$a_n-b_n-c_n+d_n$$
$$=(p^2+q^2+r^2-2pq-2pr+2qr)^{\frac{n}{2}}$$
$$=(-p+q+r)^n, \qquad ……④$$

$$a_n+b_n-c_n-d_n$$
$$=(p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr)^{\frac{n}{2}}$$
$$=(p+q-r)^n. \qquad ……⑤$$

(②＋③＋④＋⑤)÷4 より

$$a_n=\frac{1}{4}\{1+(p-q+r)^n$$
$$+(-p+q+r)^n+(p+q-r)^n\}.\quad 答$$

【想定配点】(60点)

(1)(計 10 点)
[1]　①に $\boxed{10\text{点}}$．

(2)(計 20 点)
[2]　n が奇数のとき $a_n-b_n+c_n-d_n=0$ に $\boxed{5\text{点}}$．
[3]　n が偶数のときの $a_n-b_n+c_n-d_n$ に $\boxed{15\text{点}}$．
※公比が正しく他が誤っているときは $\boxed{10\text{点}}$．

(3)(計 30 点)
[4]　n が奇数のとき $a_n=0$ に $\boxed{5\text{点}}$．
[5]　②，④，⑤に $\boxed{5\text{点}\times 3}$．
[6]　n が偶数のときの a_n に $\boxed{10\text{点}}$．