東工大　2017　二次試験　数学講評

＜難易度　例年の比較＞

昨年は難しいというよりも取りにくい問題という印象でしたが，今年は明らかに難化です．ここ近年と比較してもかなり難しく，近年の目標点である 180 点を取るのは相当に厳しいと思います．ある程度取りやすい $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ のどちらかを完答し，難問の $\boxed{3}$ を回避して $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ から部分点をかき集めて 120 点ほど取れていれば十分でしょう．

＜傾向と対策＞

東工大は得点開示を始めてからは問題が易しくなりました．その一例として，誘導設問のないタイプの出題は 2013 年を最後に出題されていませんでした．しかし今年は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ でそのタイプが復活しており，以前のレベルに戻っています．

昨年の出題は数Ⅲが特に少なくなっていましたが，今年は $\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$ に数Ⅲが絡んできており，数Ⅲ重視の傾向に回帰しています．

整数はここ 4 年連続の出題で，一昔前に見られた高度な題材ではなく，整数の本質を問う良問が出題されています．だからこそ付け焼刃は通用しませんから，腰を据えて学ぶ必要があります．

計算量の増加 (というより今までの東工大のレベルに戻っただけ) も留意すべきポイントで，ノートの見開きでも計算スペースが足らないほどの重量級の問題にどれだけ取り組んできたかが勝負の分かれ目になりそうです．

今年の入試のトピックとして，$\boxed{3}$ の図形問題のために長方形の紙が配られたことがあります．「実験して法則を見つけ，定式化してみなさい」という意図でしょう．惜しむらくは問題が難しすぎたことですが，この出題姿勢はこれまでの東工大の出題意図と一貫しており，好感が持てます．よって東工大の数学を対策するには，頻出問題を押さえることはもちろん重要ですが，それと並行して初見の問題を何とかして料理しようとする実験力の養成がポイントになります．

東工大　2017　二次試験　数学解答

$\boxed{1}$

次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ．

(i)　N の正の約数は 12 個．

(ii)　N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12．

ただし，N の約数には 1 と N も含める．

自然数の正の約数の個数から，自然数の素因数分解の構造を決定する頻出問題です．途中に議論が難しい場所がありますが，そこでつまずいても何とかごまかして 30 点は取りたいところです．

なお，約数はペアをなすことが理解できていれば，別解 のようにシラミつぶしで片付きます．

解答

まず，N は $12=2^2\cdot 3$ を約数に持つ．　……①

また 12 を (自然数＋1) の積で表す方法は

$12=(11+1)$,

$6\cdot 2=(5+1)(1+1)$

$4\cdot 3=(3+1)(2+1)$

$3\cdot 2\cdot 2=(2+1)(1+1)(1+1)$

の 4 パターンあるから，N の正の約数が 12 個となるのは次の 4 パターン．ただし p, q, r は相異なる素数とする．

(ア)　$N=p^{11}$ のとき

これは①に反する．

(イ)　$N=p^5\cdot q^1$ のとき

①より $(p, q)=(2, 3)$ のみ適し，このとき $N=2^5\cdot 3^1=96$ は (ii) を満たす．

(ウ)　$N=p^3\cdot q^2$ のとき

①より $(p, q)=(2, 3), (3, 2)$ のみ適し，このとき $N=2^3\cdot 3^2=72$ は (ii) に反し，$N=3^3\cdot 2^2=108$ は (ii) を満たす．

(エ)　$N=p^2\cdot q^1\cdot r^1$ のとき

①より $p=2$，$q=3$ としてよく，$r\geqq 5$ である．このとき

$N=1\cdot 12r,\ 2\cdot 6r,\ 3\cdot 4r,$

$\quad 4\cdot 3r,\ 6\cdot 2r,\ 12\cdot r$

より，N の約数について

$1<2<3<4<6<12,$

$r<2r<3r<4r<6r<12r.$

よって 12 が 7 番目の正の約数であることから $r<12$ が必要．

$r=5$ のとき $N=60$ だがこれは (ii) に反する．

$r=7$ のとき $N=84$ は (ii) を満たす．

$r=11$ のとき $N=132$ は (ii) を満たす.
(ア)〜(エ) より

$$N=84,\ 96,\ 108,\ 132.$$ 答

【想定配点】(60点)

[1]　$N=84,\ 96,\ 108,\ 132$ に $\boxed{10\text{点}\times 4}$.
余分なもの 1 つにつき -10点.
[2]　(ア)〜(エ) の場合分けに $\boxed{10\text{点}}$.
[3]　(エ) の $r<12$ に $\boxed{10\text{点}}$.

別解

N の正の約数を小さいほうから順に並べた数列を $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{12}$ とすると，N の正の約数が偶数個であるから N は平方数でないので

$$N=a_1\cdot a_{12}=a_2\cdot a_{11}=\cdots=a_6\cdot a_7$$

が成り立つ.
$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,a_6\}$ とすると，12 の約数も N の約数であるから

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\in\{a_1,\ a_2,\ \cdots,a_6\}.$$

さらに $a_7=12$ から

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}\cup\{x\}=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,a_6\}$$

となる x の候補は $x=5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$ の 6 通り.
(ア)　$x=5$ のとき
$a_6=6$ より $N=6\cdot 12=72$ だが，これは 5 が N の正の約数であることに反する.
(イ)　$x=7$ のとき
$a_6=7$ より $N=7\cdot 12=84$ であり，逆に $N=84$ のとき確かに条件を満たす.
(ウ)　$x=8$ のとき
$a_6=8$ より $N=8\cdot 12=96$ であり，逆に $N=96$ のとき確かに条件を満たす.
(エ)　$x=9$ のとき
$a_6=9$ より $N=9\cdot 12=108$ であり，逆に $N=108$ のとき確かに条件を満たす.
(オ)　$x=10$ のとき
$a_6=10$ より $N=10\cdot 12=120$ だが，このとき 5 も N の正の約数であるから $a_7=12$ に反する.
(カ)　$x=11$ のとき
$a_6=11$ より $N=11\cdot 12=132$ であり，逆に $N=132$ のとき確かに条件を満たす.

(ア)〜(カ) より

$$N=84,\ 96,\ 108,\ 132.$$ 答

【想定配点】(60点)

[1]　$N=84,\ 96,\ 108,\ 132$ に $\boxed{10\text{点}\times 4}$.
余分なもの 1 つにつき -10点.
[2]　$N=a_6\cdot a_7$ に $\boxed{10\text{点}}$.
[3]　$x=5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$ に $\boxed{10\text{点}}$.

$\boxed{2}$

実数 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ.

　地道な処理の積み重ねで解けますが，計算が多いので記述のスペースの節約にエネルギーを使うことになります.

解答

$g(t)=\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$ は周期 π の周期関数であるから，

$f(x)$ も周期 π の周期関数である.　　　　　……①

よって $0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)$ の増減を調べる.

$$f'(x)=\frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}$$

$$=\frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}.$$

$|\cos x|=c$，$|\sin x|=s$ とおき，$f'(x)\geqq 0$ とすると

$$\frac{c}{1+c^2}-\frac{s}{1+s^2}\geqq 0$$

$$c(1+s^2)-s(1+c^2)\geqq 0$$

（$(1+c^2)(1+s^2)>0$より）

$$c-s+sc(s-c)\geqq 0$$

$$(c-s)(1-cs)\geqq 0.$$

ここで

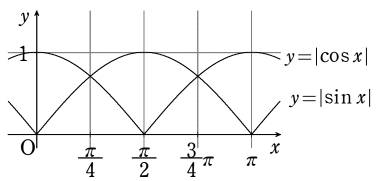
$$1-cs=1-\frac{1}{2}|\sin 2x|>0$$

から

$$f'(x)\geqq 0 \Leftrightarrow c-s\geqq 0 \Leftrightarrow c\geqq s.$$

よって $f'(x)$ の符号は $|\cos x|$ と $|\sin x|$ の大小で決まる.

$0\leqq x\leqq\pi$ における $y=|\cos x|$ と $y=|\sin x|$ のグラフは下図のようになる.



よって，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減は以下：

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

これと ① を考慮すると，$f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，

最小値は $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ である.

$h(t)=\dfrac{\sin t}{1+\sin^2 t}$ とし，$I=\displaystyle\int h(t)dt$ とすると

$$I=\int\frac{\sin t}{1+(1-\cos^2 t)}dt=\int\frac{\sin t}{2-\cos^2 t}dt.$$

$\cos t=u$ とすると $-\sin t\,dt=du$ より

$$I=\int\frac{-du}{2-u^2}$$

$$=\int\frac{du}{u^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\log|u-\sqrt{2}|-\log|u+\sqrt{2}|\}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C.$$（C は積分定数）

よって $h(t)$ の不定積分の 1 つを $H(t)$ とすると

$$H(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\cos t-\sqrt{2}}{\cos t+\sqrt{2}}\right|.$$

これより

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}h(t)dt=H\left(\frac{3}{4}\pi\right)-H\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt+\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}h(t)dt-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}h(t)dt \qquad \cdots\cdots②$$

$$=2H(\pi)-H\left(\frac{3}{4}\pi\right)-H\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

であり

$$H\left(\frac{3}{4}\pi\right)=H\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 3,$$

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 3,$$

$$H(\pi)=\frac{2}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1).$$

よって $f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log 3$，

最小値は

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(4\log(\sqrt{2}+1)-2\log 3)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}.$$ 答

【想定配点】(60点)

[1] $f(x)$ の周期性に$\boxed{5\text{点}}$.

[2] $f'(x)=0$ かつ $0\leqq x\leqq\pi$ なる x が $x=\frac{\pi}{4}$ と $x=\frac{3}{4}\pi$ であることに$\boxed{10\text{点}}$.

[3] $f(x)$ の増減に$\boxed{10\text{点}}$.

[4] $H(t)$ に相当する部分に$\boxed{10\text{点}}$.

[5] 最大値に$\boxed{10\text{点}}$.

[6] ②に$\boxed{5\text{点}}$.

[7] 最小値に$\boxed{10\text{点}}$.

参考

初めから絶対値を場合分けして外す方針でも大差ありません.

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt,$$

$$f'(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$$

$$=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(1-\cos x\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)},$$

$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ において

$$f(x)=\int_x^{\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_x^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt,$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$=\frac{-(\sin x+\cos x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$

$$=\frac{-(\sin x+\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$

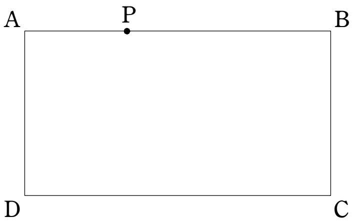
より片付きます.

$\boxed{3}$

a を1以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし AD$=1$，AB$=a$ である．P を AB 上の点とし，AP$=x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を1回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1)　S を a と x で表せ．

(2)　$a=1$ とする．P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．
(白紙は回収しない)

ほとんどの受験生は，紙を折るだけで何もできなかったのではないでしょうか．場合分けが気づきにくく，さらにその場合分けの基準を数式に載せるのに難儀します．しかも，この内容を解答用紙に収めることも至難で，いろいろ大変な問題です．

解答

(1)　長方形 ABCD を st 座標平面上に配置する．

D$(0,\ 0)$，C$(a,\ 0)$，B$(a,\ 1)$，A$(0,\ 1)$，P$(x,\ 1)$

であり，$0 \leqq x \leqq a$ に留意する．

D を P に重ねるときの長方形の折り目は，線分 DP の垂直二等分線であり，それを ℓ とする．ℓ 上の任意の点を $(s,\ t)$ とすると

$$s^2+t^2=(s-x)^2+(t-1)^2$$

$$t=-xs+\frac{x^2+1}{2}. \qquad \cdots\cdots①$$

これは ℓ の方程式である．

ℓ と直線 $s=a$ の交点を $(a,\ t_1)$ とすると

$$t_1=-ax+\frac{x^2+1}{2}=\frac{x^2-2ax+1}{2}.$$

ℓ と直線 $t=1$ の交点を $(s_1,\ 1)$ とすると

$$1=-xs_1+\frac{x^2+1}{2}$$

$$s_1=\frac{x^2-1}{2x}.$$

よって

$$s_1 \geqq 0 \Leftrightarrow x \geqq 1$$

であり，$t_1 \geqq 0$ を同値変形すると

$$-ax+\frac{x^2+1}{2} \geqq 0$$

$$x^2-2ax+1 \geqq 0$$

$$x \leqq a-\sqrt{a^2-1},\ a+\sqrt{a^2-1} \leqq x.$$

ここで

$$a-\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-1}>0,$$

$$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)-1 \geqq a-1 \geqq 0,$$

$$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)-a \geqq 0,$$

$$1-\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)$$

$$=\sqrt{a^2-1}-(a-1)$$

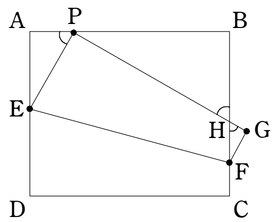
$$=\sqrt{a-1}\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right) \geqq 0,$$

から

$$0<a-\sqrt{a^2-1} \leqq 1 \leqq a \leqq a+\sqrt{a^2-1}.$$

(ア)　$0 \leqq x \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

このときの図は以下のようになる：



$$\text{AP}=x,\ \text{ED}=\text{EP}=\frac{x^2+1}{2},$$

$$\text{AE}=1-\text{ED}=\frac{1-x^2}{2},$$

$$\text{FG}=\text{FC}=t_1$$

であり，$\triangle\text{APE} \backsim \triangle\text{BHP} \backsim \triangle\text{GHF}$ に留意すると

$$\text{GH}=\text{FG}\times\frac{\text{AP}}{\text{AE}}$$

$$=t_1\cdot\frac{x}{\frac{1-x^2}{2}}=t_1\cdot\frac{2x}{1-x^2}$$

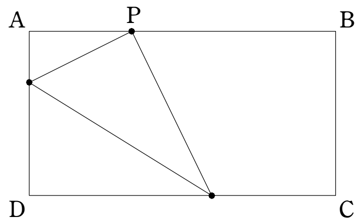
から

$$S=\frac{1}{2}\cdot t_1\cdot\left(t_1\cdot\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}.\ \text{答}$$

(イ)　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$ のとき

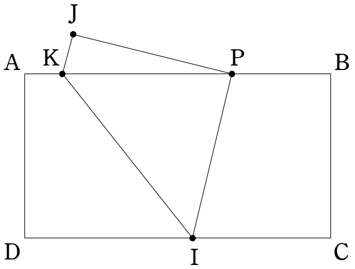
このときの図は以下のようになる：



よって $S=0$．答

(ウ)　$1 \leqq x \leqq a$ のとき

このときの図は以下のようになる：



$$\angle \mathrm{KLP} = \frac{\pi}{2},\ \ \mathrm{JP} = \mathrm{AD} = 1,$$

$$\mathrm{KJ} = \mathrm{KA} = s_1$$

から

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot s_1 = \frac{x^2 - 1}{4x}.$$ 答

(2)　$a = 1$ のときは(ア)の場合のみであるから

$$S = \frac{x(x^2 - 2x + 1)^2}{4(1 - x^2)}$$

$$= \frac{x(x-1)^4}{4(1+x)(1-x)} = \frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}.$$

ここで

$$\{x(1-x)^3\}' = (1-x)^3 + x \cdot 3(1-x)^2 \cdot (-1)$$

$$= (1-x)^2(1-4x)$$

より

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-x)^2(1-4x)(1+x) - x(1-x)^3}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^2}{4(1+x)^2} \cdot \{(1-4x)(1+x) - x(1-x)\}$$

$$= \frac{(1-x)^2}{4(1+x)^2} \cdot (-3x^2 - 4x + 1).$$

$0 < x < 1$ で $\dfrac{(1-x)^2}{4(1+x)^2} > 0$ であるから，$\dfrac{dS}{dx}$ の符号は $-3x^2 - 4x + 1$ の符号に等しい．

$3x^2 + 4x - 1 = 0$ とすると $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ であり，

$\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} < 0 < \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} < 1$ から S の増減は以下：

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	(1)
$\dfrac{dS}{dx}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって S は $x = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ のとき最大．答

【想定配点】(60点)

(1)(計 40 点)

[1]　(ア)の $0 \leqq x \leqq a - \sqrt{a^2 - 1}$ に $\boxed{\text{5点}}$．

[2]　(ア)の $S = \dfrac{x(x^2 - 2ax + 1)^2}{4(1 - x^2)}$ に $\boxed{\text{10点}}$．

[3]　(イ)の $a - \sqrt{a^2 - 1} \leqq x \leqq 1$ に $\boxed{\text{5点}}$．

[4]　(イ)の $S = 0$ に $\boxed{\text{5点}}$．

[5]　(ウ)の $1 \leqq x \leqq a$ に $\boxed{\text{5点}}$．

[6]　(ウ)の $S = \dfrac{x^2 - 1}{4x}$ に $\boxed{\text{10点}}$．

(2)(計 20 点)

[7]　$\dfrac{dS}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ に $\boxed{\text{15点}}$．

[8]　S の増減に $\boxed{\text{5点}}$．

4

n は正の整数とし，文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$　文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1)　A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 $(*)$ を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 12$ とする．A_n から要素を 1 つ選んだところ，これは条件 $(*)$ を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} Q(n)$を求めよ．

見るからに漸化式を作る問題なんですが，類題経験がないとつらいと思います．しかも (2) はヒラメキが必要で，(1) ができていれば御の字でしょう．

解答

(1)　A_n の要素の個数は 3^n である．

A_n の要素のうち，$(*)$ を満たし n 番目が c でないものの個数を d_n，$(*)$ を満たし n 番目が c であるものの個数を e_n とする．

d_n 通り	a *or* b	a *or* b *or* c

e_n 通り	c	a *or* b

d_{n+1} は，n 番目が a *or* b であり $n+1$ 番目が a *or* b の並べ方と，n 番目が c であり $n+1$ 番目が a *or* b の並べ方の和である．

e_{n+1} は，n 番目が a *or* b であり $n+1$ 番目が c の並べ方に等しい．

よって

$$d_{n+1}=2d_n+2e_n, \qquad \cdots\cdots ①$$

$$e_{n+1}=d_n. \qquad \cdots\cdots ②$$

②を①に代入し

$$e_{n+2}=2e_{n+1}+2e_n$$

$$e_{n+2}-2e_{n+1}-2e_n=0. \qquad \cdots\cdots ③$$

$x^2-2x-2=0$ の解を $\alpha,\ \beta$（$\alpha<\beta$）とすると

$$\alpha=1-\sqrt{3},\ \beta=1+\sqrt{3}.$$

これと③より

$$e_{n+2}-\alpha e_{n+1}=\beta(e_{n+1}-\alpha e_n),$$

$$e_{n+2}-\beta e_{n+1}=\alpha(e_{n+1}-\beta e_n)$$

であり $e_1=1$，$e_2=2$ から

$$e_{n+1}-\alpha e_n=\beta^{n-1}(e_2-\alpha e_1)=\beta^n,$$

$$e_{n+1}-\beta e_n=\alpha^{n-1}(e_2-\beta e_1)=\alpha^n$$

より

$$(\beta-\alpha)e_n=\beta^n-\alpha^n$$

$$e_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\beta^n-\alpha^n).$$

②より

$$d_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&P(n)\\
&=\frac{d_n+e_n}{3^n}\\
&=\frac{\beta^{n+1}+\beta^n-\alpha^{n+1}-\alpha^n}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\\
&=\frac{(2+\sqrt{3})\beta^n-(2-\sqrt{3})\alpha^n}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\\
&=\frac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}
\end{aligned}$$

答

(2)　A_n の要素のうち，$(*)$ を満たし 7 番目が c であるものの個数 f_n を考える．

1				7				n
			…	c	…			

1 番目から 7 番目の順列は，$(*)$ を満たし右端が c であるから，その並べ方は e_7 に等しい．

また 7 番目から n 番目の順列は，$(*)$ を満たし左端が c であるから，左右を入れ替えて考えるとその並べ方は $e_{n-7+1}=e_{n-6}$ に等しいので

$$f_n=e_7\cdot e_{n-6}.$$

次に A_n の要素のうち，$(*)$ を満たし 7 番目が c であり，さらに 10 番目が c であるものの個数 g_n を考える．

1				7			10				n
			…	c			c	…			

先ほどと同様に，1 番目から 7 番目の並べ方は e_7 に等しく，10 番目から n 番目の並べ方は $e_{n-10+1}=e_{n-9}$ に等しい．また 8 番目と 9 番目には a，b のいずれが入ってもいいので

$$g_n=e_7\cdot e_{n-9}\cdot 2\cdot 2=4e_7\cdot e_{n-9}.$$

よって

$$\begin{aligned}
Q(n)&=\frac{4e_7\cdot e_{n-9}}{e_7\cdot e_{n-6}}\\
&=4\cdot\frac{\beta^{n-9}-\alpha^{n-9}}{\beta^{n-6}-\alpha^{n-6}}.\\
&=4\cdot\frac{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-9}}{\beta^3-\alpha^3\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-9}}.
\end{aligned}$$

ここで $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} Q(n)=\frac{4}{\beta^3}=\frac{4}{(1+\sqrt{3})^3}.$$ 終

【想定配点】(60点)

(1)(計 35 点)

[1] ①，②に $\boxed{10点×2}$．

[2] e_n または d_n に $\boxed{10点}$．

[3] $P(n)$ に $\boxed{5点}$．

(2)(計 25 点)

[4] f_nに $\boxed{10点}$．

[5] g_nに $\boxed{5点}$．

[6] $\lim_{n\to\infty} Q(n)$ に $\boxed{10点}$．

別解

(1) A_n の要素の個数は 3^n である．

A_n の要素のうち，(*) を満たすものの個数を h_n とする．また文字 d は文字 a, b のいずれかを表すものとする．

c	d	h_n 通り

d	h_{n+1} 通り

h_{n+2} を考える．最初が c のとき 2 番目は d であり，残りは h_n 通り．最初が d のとき残りは h_{n+1} 通りであるから

$$h_{n+2}=2h_{n+1}+2h_n. \quad \cdots\cdots①$$

$x^2=2x+2$ の解を α, β（$\alpha<\beta$）とすると

$$\alpha=1-\sqrt{3},\ \beta=1+\sqrt{3}.$$

これと①より

$$h_{n+2}-\alpha h_{n+1}=\beta(h_{n+1}-\alpha h_n),$$
$$h_{n+2}-\beta h_{n+1}=\alpha(h_{n+1}-\beta h_n)$$

であり $h_1=3$，$h_2=8$ から

$$h_{n+1}-\alpha h_n=\beta^{n-1}(h_2-\alpha h_1)=(2+\sqrt{3})\beta^n,$$
$$h_{n+1}-\beta h_n=\alpha^{n-1}(h_2-\beta h_1)=(2-\sqrt{3})\alpha^n$$

より

$$(\beta-\alpha)h_n=(2+\sqrt{3})\beta^n-(2-\sqrt{3})\alpha^n$$
$$h_n=\frac{(2+\sqrt{3})\beta^n-(2-\sqrt{3})\alpha^n}{2\sqrt{3}}$$

から

$$P(n)$$
$$=\frac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}.$$ 答

(2) A_n の要素のうち，(*) を満たし 7 番目が c であるものの個数 f_n を考える．

1〜5	6	7	8	9〜n
h_5 通り	d	c	d	h_{n-8} 通り

6・8 番目は d に決まり，1 〜 5 番目の並べ方が h_5 通り，9 〜 n 番目の並べ方が $h_{n-9+1}=h_{n-8}$ 通りであるから

$$f_n=h_5\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot h_{n-8}=4h_5h_{n-8}.$$

次に A_n の要素のうち，(*) を満たし 7・10 番目が c であるものの個数 g_n を考える．

1〜5	6	7	8	9	10	11	12〜n
h_5 通り	d	c	d	d	c	d	h_{n-11} 通り

6・8・9・11 番目は d に決まり，1 〜 5 番目の並べ方が h_5 通り，12 〜 n 番目の並べ方が $h_{n-12+1}=h_{n-11}$ 通りであるから

$$f_n=h_5\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot h_{n-11}=16h_5h_{n-11}.$$

よって

$$Q(n)=\frac{16h_5h_{n-11}}{4h_5h_{n-8}}$$
$$=4\cdot\frac{(2+\sqrt{3})\beta^{n-11}-(2-\sqrt{3})\alpha^{n-11}}{(2+\sqrt{3})\beta^{n-8}-(2-\sqrt{3})\alpha^{n-8}}.$$
$$=4\cdot\frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-11}}{(2+\sqrt{3})\beta^3-(2-\sqrt{3})\alpha^3\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-11}}.$$

ここで $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} Q(n)=\frac{4}{\beta^3}=\frac{4}{(1+\sqrt{3})^3}.$$ 終

【想定配点】(60点)

(1)(計 35 点)

[1] ①に $\boxed{10点×2}$．

[2] h_n に $\boxed{10点}$．

[3] $P(n)$ に $\boxed{5点}$．

(2)(計 25 点)

[4] f_nに $\boxed{10点}$．

[5] g_nに $\boxed{5点}$．

[6] $\lim_{n\to\infty} Q(n)$ に $\boxed{10点}$．

5

実数 a, b, c に対して
$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$
とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1, -1 を除いたものを T とする．

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，
$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$
を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ．

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ．

(1) さえ突破できれば，あとはごまかしごまかしで先に行けます．解答では共役解を利用しましたが，$f(x)=0$ が虚数解を持つ必要条件から $-2<c<2$ を求め，それが十分であることを示すこともできます．

解答

便宜上，$\cos\theta+i\sin\theta=e^{\theta i}$ と表す．

(1)　T 上にある複素数は虚数であるから，　……①
$$e^{\theta i}\quad（ただし\ \theta\ は \sin\theta\neq 0\ なる実数\ \theta）$$
と表せる．
$f(x)$ は実数係数の多項式であるから，$x=e^{\theta i}$ が $f(x)=0$ の解であるとすると $x=e^{-\theta i}$ も解であり，$e^{\theta i}\neq e^{-\theta i}$ であるから

$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある　……②

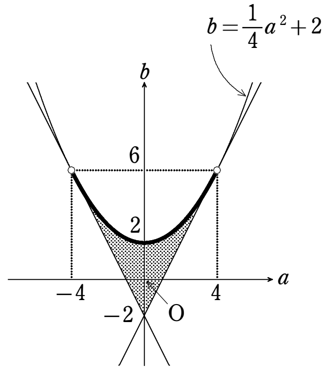
$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=(x-e^{\theta i})(x-e^{-\theta i}) & \cdots\cdots③\\ \sin\theta\neq 0 & \cdots\cdots④\end{cases}$

なる 実数 θ が存在する．

③の右辺を計算すると
$$\begin{aligned}&(x-e^{\theta i})(x-e^{-\theta i})\\&=x^2-(e^{\theta i}+e^{-\theta i})x+e^{\theta i}\cdot e^{-\theta i}\\&=x^2-2\cos\theta\, x+1\end{aligned}$$
より係数を比較し
$$c=-2\cos\theta.$$
$\sin\theta\neq 0$より $-1<\cos\theta<1$ であるから，求める条件は
$$-2<c<2.\ \boxed{答}$$

(2)　$F(x)$ も実数係数の多項式であるから，(1) と同様に $x=e^{\theta i}$ が $f(x)=0$ の解であるとすると $x=e^{-\theta i}$ も解である．
よって $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，その解は $\sin\theta_1\neq 0$，$\sin\theta_2\neq 0$ なる実数 θ_1, θ_2 を用いて
$$x=e^{\theta_1 i},\ e^{-\theta_1 i},\ e^{\theta_2 i},\ e^{-\theta_2 i}$$
と表されるので，$F(x)$ は
$$\begin{aligned}&(x-e^{\theta_1 i})(x-e^{-\theta_1 i})(x-e^{\theta_2 i})(x-e^{-\theta_2 i})\\&=(x^2-2\cos\theta_1 x+1)(x^2-2\cos\theta_2 x+1)\end{aligned}$$
と書ける．
よって，実数 $c_1=-2\cos\theta_1$，$c_2=-2\cos\theta_2$ が存在する．$\boxed{終}$

(3)　(1)，(2) の議論より，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は
$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1),\quad\cdots\cdots⑤$$
$$-2<c_1<2,\ -2<c_2<2$$
なる実数 c_1，c_2 が存在することである．
⑤より
$$\begin{aligned}&F(x)\\&=x^4+(c_1+c_2)x^3+(2+c_1c_2)x^2+(c_1+c_2)x+1\end{aligned}$$
から，係数を比較し
$$a=c_1+c_2,\ b=2+c_1c_2$$
すなわち
$$c_1+c_2=a,\ c_1c_2=b-2.$$
よって $t=c_1$, c_2 を解に持つ 2 次方程式は
$$t^2-at+(b-2)=0.\quad\cdots\cdots⑥$$
$g(t)=t^2-at+(b-2)$ とすると，求める条件は⑥が $-2<t<2$ に 2 つの実数解を持つこと，すなわち
$$g(-2)>0,\ g(2)>0,$$
$$a^2-4(b-2)\geqq 0,\ -2<\frac{a}{2}<2$$
より
$$b>-2a-2,\ b>2a-2,$$
$$b\leqq\frac{1}{4}a^2+2,\ -4<a<4.\ \boxed{答}$$
これを図示すると以下の打点部になる．
ただし，境界は太線部のみ含む．$\boxed{答}$



【想定配点】(60点)

(1)(計 20 点)

[1]　$-2<c<2$ に $\boxed{10\text{点}}$.

※ $-2\leqq c\leqq 2$ は $\boxed{5\text{点}}$.

[2]　必要十分条件の議論に $\boxed{10\text{点}}$.

(2)(計 10 点)

[3]　共役解の議論に $\boxed{5\text{点}}$.

[4]　$(x^2-2\cos\theta_1 x+1)(x^2-2\cos\theta_2 x+1)$ などに $\boxed{5\text{点}}$.

(3)(計 30 点)

[5]　$-2<c_1<2$，$-2<c_2<2$ に $\boxed{5\text{点}}$.

[6]　$a=c_1+c_2$，$b=2+c_1c_2$ に $\boxed{5\text{点}}$.

[7]　a，b の条件に $\boxed{15\text{点}}$.

[8]　領域の図示に $\boxed{5\text{点}}$.